q と $\dot{q}$ の独立性について

double quarter

2023 年 6 月 20 日

1 目的

解析力学を学び始めた初学者の多くが疑問に感じる部分として、q 偏微分と $\dot{q}$ 偏微分という操作がある。確かに $q(t)$ が決定すれば $q(\dot{t})$ も決定されると考えると、独立ではないように思える。これに対して方々から様々な答えがあるが、結局クリティカルな部分には触れていないものが多いように思う。そこで、この疑問について「わからない立場」から入り、初学者にとって納得の行く答えを書きたいと思った。これが本 pdf の目的である。

2 Euler Lagrange 方程式の導出

一般的な Euler Lagrange 方程式の導出の流れをまず書いておく。(参考:[1])

$L(q, \dot{q}, t)$ に対して、$q \to q + \delta q$ とすると、

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \dots \tag{1}$$

よって作用 $S[q]$ の変分は、

$$\begin{aligned}
\delta S[q] &= S[q + \delta q] - S[q] \qquad (2)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt(L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)) \qquad (3)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i) \qquad (4)\\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i \qquad (5)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i \qquad (6)
\end{aligned}$$

よって $S[q]$ が停留する、すなわち $\delta S[q] = 0$ となるために、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{7}$$

であるべきとして、Euler Lagrange 方程式が求まった。

3　疑問とよくある答え

まずは何が問題に思えるのかきちんと整理しよう。(以下簡単のため q は 1 自由度だとして議論する)

そもそも偏微分とは、他の変数を固定して行う微分のことだった。それを考えると、もし変数どうしに従属関係があれば、偏微分はできないように思える。実際 $q(t)$ と $\dot{q(t)}$ はいずれも t の関数であり、t を消去するように解けばたしかに q と $\dot{q}$ の間に従属関係 $q = q(\dot{q})$ が作れる。

これに対する反論として、ラグランジアンの時点では q と $\dot{q}$ はいずれもまだ t の関数として求まってはいないということ、が言われる。これは確かにその通りだ。$q(t)$ としての関数形は Euler Lagrange 方程式を解いた結果得られるものであり、ラグランジアンを立てた段階では q と $\dot{q}$ はともにただの独立変数だと言える。

しかし注意深く見ると、これでもまだ疑問は解決していないことがわかる。(4) から (5) への式変形において、二項目は部分積分していることに注目してほしい。これはさっきまで独立だと言っていた q と $\dot{q}$ が $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ の関係をもっていたために、$\delta\dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q)$ が成り立つと言っていることになるのではないか。先ほどの主張とは矛盾しているように感じる。

結論から言うと、先ほどの主張が誤っているわけではない。しかし、今述べたような疑問を解決できない点において、説明不足でもあると言える。

4　解決方法

まずは q と $\dot{q}$ は、ラグランジアンを立てた時点ではともにただの独立変数だという主張を詳しく説明する。正確な議論のためには微分幾何学の知識がいるが、筆者も詳しくないため定性的な議論になってしまうことはご了承願いたい。

ある瞬間を見よう。このとき q の位置が同じだとしても、$\dot{q}$ の値は何でもとれる (図 1)。これは難しい話ではなく、同じ点を通る物体でも様々な通り方 (様々な速度) があるというだけだ。この意味で、q と $\dot{q}$ は独立である。

混乱の原因は、$q(t)$ として経路が定まっている場合にある (図 2)。このときはたしかに q が決まればその接線として $\dot{q}$ も決まる。力学の対象として、単に位置と言ったときは $q(t)$ として経路をイメージすることが多いだろう。これはこれとして全く正しい。しかし解析力学において、今考えたい操作はそうではないと主張しているのだ。

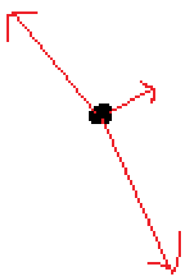

図 1

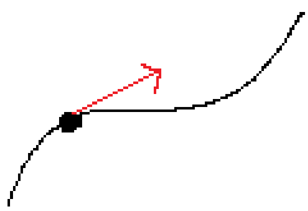

図 2

変分という操作をきちんと考えてみよう。今ラグランジアンの中の変数を t の関数として (境界条件さえ満たせば) 自由に動かせるとしている。その中で作用の変分 δS を停留させたいと言っている。

次が要点だ。先ほどの q と $\dot{q}$ は、経路とする前は独立に動かせるという主張を真に受けて変分を考えてみよう。すると、物理的な経路として明らかにおかしいものも考えられることがわかる (図 3)。これは最終的に物理的な解として残って欲しくはない。だが q と $\dot{q}$ が独立なら必然的に入ってきてしまう解だ。だからといってすぐに q と $\dot{q}$ を独立に動かすことが誤りだったということではない。これもきちんと解決していこう。

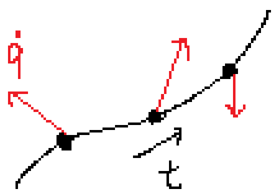

図 3

結論から言うと、最終的な $q(t)$ が物理的にありえる経路となるための条件として、$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ が課されているとすると納得が行く。このある種の拘束条件を課すという操作を数式として扱っていく。

全てについて変分をとって、そのうち経路としての条件をみたすもののうち作用を最小にするものを取ってくるというのが、この方針の最も素直な反映である。しかしこれを字面どおりにするのは難しいので、少し問題を言い換える。経路としての条件を満たすという拘束条件を課しつつ、その上で全ての変分をとって作用を停留させるものをもってくると考えよう。この言い換えをしても、最終的に得られる解は変わらないだろう。

まず考えてほしいのは拘束条件付きの変分問題だ。証明や詳細は省くが、主張だけ書いておこう。ただし使いやすい形に書き直し (特殊化) している。

拘束条件付きの変分問題 (参考:[2])

$G(\{x\}, t) = 0$ という拘束条件付きのラグランジアン L の作用停留の解は、

$$L'(\{x\}, t) = L(\{x\}, t) + \lambda G(\{x\}, t)$$

で定義される $L'(\{x\}, t)$ に対して、$\{x\}$ の変数それぞれについて作用を変分したときの停留解と、$G(\{x\}, t) = 0$ とを連立した解である。

ここで、$\{x\}$ それぞれは (最終的に t の関数として求めたいものだが) 特に関係がなく、独立変数である。一次元を例にとるなら、Euler Lagrange 方程式のうち、ラグランジアンが $\dot{q}$ によらず、さらに位置変数が二つのものをとってきたと考えるとよい。

今考える問題は、$L(q, Q, t)$ というラグランジアンを、拘束条件 $\dot{q} - Q = 0$ で解くことである。今 $L' = L(q, Q, t) + \lambda(\dot{q} - Q)$ とおく。ここで q はまだ関数として定まっていないのだから $\dot{q}$ は定めようがないのではないかと思われるかもしれない。これについては作用 S の形にして汎関数として定義するまで限りなく微妙な記述だが、最終的には正当化される。

早速変分 δS をとってみよう。$S[q]$ は汎関数であり、何らかの $q(t)$ をとってきて定まる量である。つまり作用を考えた時点で一つ経路をとってきているので、S の中では $\dot{q}$ も定まる。(それが言えるならこの節の議論は不要ではないかと思われた人は、次の節を見てほしい) 実際に変分すると、

$$\delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q] \tag{8}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt(L'(q+\delta q, Q+\delta Q, t) - L'(q, Q, t)) \tag{9}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q + \lambda(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q) - \delta Q)\} \tag{10}$$
$$= \left[\frac{\partial L}{\partial Q}\delta q\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\{(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t})\delta q + (\frac{\partial L}{\partial Q} - \lambda)\delta Q\} \tag{11}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\{(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t})\delta q + (\frac{\partial L}{\partial Q} - \lambda)\delta Q\} \tag{12}$$

$\delta q, \delta Q$ それぞれの項について、0 になるべきという停留条件を課せば、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q} - \lambda = & 0 \end{cases}$$

これを連立して λ を消去することで、

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial Q} = 0$$

最後に拘束条件 $\dot{q} - Q = 0$ を課せば、

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

と Eular Lagrange 方程式が求まった。

色々と長い道のりになってしまったが、q と $\dot{q}$ の独立性、もとい q と Q の独立性に則って議論するとこれが正しい導出方法になる。しかし途中でチラッと書いたように、こんなに回りくどいことをせずとも良いとも言える。それが次の節だ。

5　もう一つの解決方法

教科書では上でしたような正当化の議論はされていない。だからといってそれが誤りというわけではないということも強調しておきたい。

上の議論では、疑問に対するよくある返答に沿う形で話を進めていった。しかしこの疑問は汎関数と変分というものを正しく考えることで解決できるものであり、教科書の記述はむしろそちらで考えているとするのが正しいだろう。(以下の議論は中身としては上と同じ事をしていると言える)

汎関数は関数の関数だった。今で言うと、$S[q(t)]$ は $q(t)$ という関数の関数だから、汎関数である。つまり、q として経路をとってきてあり、経路として色々動かして S の停留点を探しているのだ。

このとき $q(t)$ として経路になっているのだから、q と $\dot{q}$ は独立でないように見える。これを解決するために変分についてきちんと考えてみる。汎関数の意味を考えよう。$q(t)$ として経路をとってきている。すると $\dot{q(t)}$ もそこから定まる。よって $S[q(t)+\delta q(t)]$ を考えると、$q_i \to q_i + \delta q_i$ であり、今 $q_i(t)$ は経路になっているものをとってきていることから $\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$ の関係があるので、$\dot{q}_i \to (q_i \dot{+} \delta q_i) = \dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}$ である。

ここからすぐに $L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) \simeq L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i$ が言えるのであるが、わかりにくいので具体例を考えてみる。

例として具体的に調和振動子の Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \tag{13}$$

を取り上げる。

変分により、δq の一次までを取ってきて、

$$\begin{aligned} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) &= \frac{1}{2}m(\dot{q}+\frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}t})^2 - \frac{1}{2}k(q+\delta q)^2 && (14) \\ &\simeq \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + m\dot{q}\frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}t} - kq\delta q && (15) \end{aligned}$$

ここで $L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) = L(q,\dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$ となっていることが確認できる。

つまり何が言いたいかというと、この場合 q と $\dot{q}$ を独立として偏微分しているというより、変分という操作の結果を形式的に表すために偏微分の形を取っていると考えると納得が行くのである。

さらに言うのであれば、結果を先取りして得られる $q(t), \dot{q}(t)$ を用いて、t を消去することで $q(\dot{q})$ とすることもできるだろう。しかし、こうした上で従属とみなして偏微分することは考えたい変分とは全く違う操作になってしまう。

偏微分が一方の変数を固定したままで微分する操作であることを思い返すと、今の自由度と拘束条件の数ではそもそも偏微分できないだろう。その意味で、拘束条件を課す前に偏微分するべきだが、これでは前述の通りダブルバインドになってしまうので、変分という操作がこれだと考えてしまって良いだろう。

ここからは δL を使って δS を求め、その停留条件を考えれば最初と同様に Euler Lagrange 方程式が求まることになる。

もっと知りたい人は、変分問題の数学的に厳密な証明を追うと良いだろう。ざっくり言うと、変分操作を試行関数 ϕ と微小な量 ϵ の積で表現する方法だ。きちんと既知の微分操作に帰着して、この節と内容としては同じことを表していることがわかるだろう。

参考文献

[1] 基幹講座物理学 解析力学 (畑浩之)

[2] 変分法 - 学校法人東邦大学 (佐藤洋一):
https://www.mnc.toho-u.ac.jp/v-lab/yobology/variation/variation.htm